

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ГАБРОВО

СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА

Плевен, 20.02.2016 г.

УВАЖАЕМИ УЧЕНИЦИ,

Тестът съдържа **28 задачи** по математика от **два вида**:

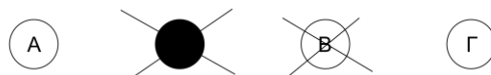
- 20 задачи със структуриран отговор с четири възможни отговора, от които само един е верен;
- 8 задачи със свободен отговор.

Първите 20 задачи (от 1. до 20. включително) в теста са от затворен тип с четири възможни отговора, обозначени с главни букви от А до Г, от които само един е верен.

Отговорите на тези задачи отбелязвайте с черен или син цвят на химикалката в **листа за отговори**. За да отбележите верния отговор, зачертайте със знака  кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:



Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и зачертайте буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:



За всяка задача трябва да е отбелязан не повече от един действителен отговор. Като действителен отговор на съответната задача се приема само този, чиято буква е зачертана със знака  .

Отговорите на задачите със свободен отговор (от 21. до 28. вкл.) запишете в предоставения **свитък за свободните отговори**, като за задачи от 26. до 28. вкл. запишете пълните решения с необходимите обосновки.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ГАБРОВО

СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА

Плевен, 20.02.2016 г.

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Кое от посочените числа е най-малко?

A) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ Б) 2^{-4} В) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{-2}$ Г) $(-2)^2$

2. Стойността на израза $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt[3]{(-1)^3} + \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ е:

A) $2 + 2\sqrt{3}$ Б) $2 + 2\sqrt{2}$ В) $-4 + 2\sqrt{2}$ Г) $4 + 2\sqrt{3}$

3. Допустимите стойности на израза $\frac{x-2}{\sqrt{x-3}} + \frac{1}{x-4}$ са:

A) $x \in (3; +\infty)$ Б) $x \in [3; 4) \cup (4; +\infty)$ В) $x \in [3; +\infty)$ Г) $x \in (3; 4) \cup (4; +\infty)$

4. Решенията на неравенството $\frac{1}{x} < 1$ са:

A) $x \in (1; +\infty)$ Б) $x \in (0; 1)$ В) $x \in (-\infty; 1)$ Г) $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

5. Стойността на израза $\log_2 64 - \log_3 \frac{1}{9} + \lg 0,1$ е:

A) 3 Б) 6 В) 7 Г) 9

6. Кое от уравненията има корени с различни знаци?

A) $-x^2 + 3x + 1 = 0$ Б) $x^2 + 3x + 1 = 0$ В) $x^2 - 3x + 1 = 0$ Г) $-x^2 + 10x - 3 = 0$

7. Броят на реалните корени на уравнението $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ е:

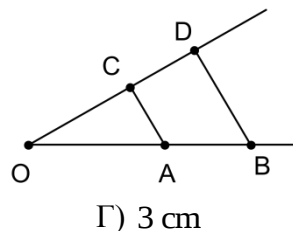
A) 0 Б) 2 В) 3 Г) 4

8. Ако $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, то стойностите на функцията $f(x) = \sin x$ са в интервала:

- А) $[-1; 0]$ Б) $[0; 1]$ В) $[-1; 1]$ Г) $(-1; 0)$

9. На чертежа $AC \parallel BD$. Ако $OA = 3$ cm, $AB = 2$ cm и $AC = 2$ cm, то отсечката BD е:

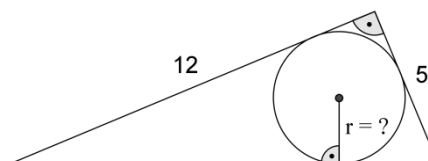
- А) $\frac{4}{3}$ cm Б) $3\frac{2}{3}$ cm В) $\frac{10}{3}$ cm



Г) 3 cm

10. Катетите на правоъгълен триъгълник са 5 cm и 12 cm. Радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е:

- А) 6,5 cm Б) 2 cm В) 1 cm Г) 1,5 cm



11. Решенията на системата $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 1 \end{cases}$ са:

- А) $(-3; -4)$ и $(4; 3)$ Б) $(-3; -4)$ и $(3; 4)$ В) $(-4; -3)$ и $(4; 3)$ Г) $(4; 3)$ и $(3; 4)$

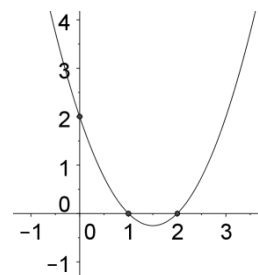
12. Броят на членовете на крайната аритметична прогресия 9; 13; 17; ...; 2013 е:

- А) 501 Б) 502 В) 503 Г) 504

13. На чертежа е изобразена графиката на квадратната функция

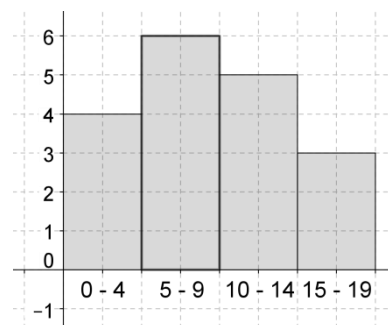
$f(x) = ax^2 + bx + c$. Сборът $a + b + c$ е:

- А) 2 Б) 3 В) 0 Г) 1



14. На диаграмата е дадено разпределението по брой на 18 числа от 0 до 19. Статистическият ред, който има такава диаграма е:

- А) 1, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 11, 16, 18, 18, 19, 19, 19
 Б) 1, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 16, 18, 18, 18, 19, 19
 В) 1, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 11, 13, 14, 14, 19, 19, 19
 Г) 1, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 19, 19, 19



15. Намерете колко трицифрени числа с различни цифри могат да се съставят от цифрите 2, 0, 1 и 3.

A) 48

Б) 36

В) 18

Г) 24

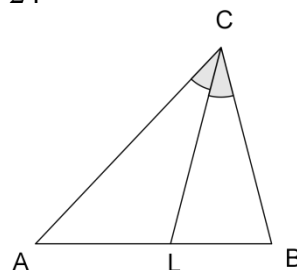
16. Страните на $\triangle ABC$ имат дължини $AB = 7$ cm, $BC = 6$ cm и $CA = 8$ cm. Отсечката CL ($L \in AB$) е ъглополовяща в триъгълника. Намерете дължината на отсечката AL .

A) 4 cm

Б) 3 cm

В) 3,2 cm

Г) 4,1 cm



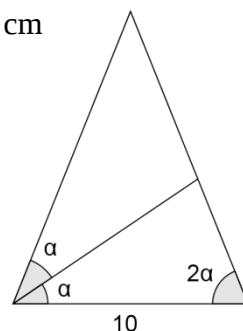
17. Основата на равнобедрен триъгълник е 10, а ъгълът при основата му е 2α . Намерете ъглополовящата на ъгъла при основата.

A) $\frac{10 \sin 2\alpha}{\sin \alpha}$

Б) $\frac{10 \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$

В) $\frac{10 \sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}$

Г) $\frac{10 \cos 2\alpha}{\sin 3\alpha}$



18. Бедрото на равнобедрен триъгълник е 17 cm, а косинусът на ъгъла при основата му е $\frac{8}{17}$. Намерете лицето на триъгълника.

A) 80 cm^2

Б) 90 cm^2

В) 60 cm^2

Г) 120 cm^2



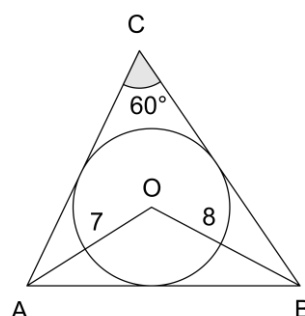
19. Центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност е на разстояние 7 и 8 от върховете му A и B . Намерете AB , ако ъгълът при върха C е 60° .

A) 10

Б) 11

В) 12

Г) 13



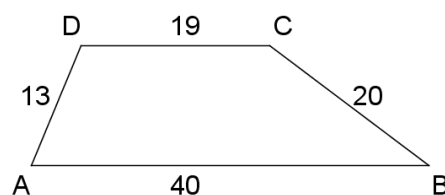
20. Намерете лицето на трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$), ако $AB = 40$, $BC = 20$, $CD = 19$ и $AD = 13$.

A) 354

Б) 126

В) 546

Г) 84



Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободни отговори!

21. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x) = x^2 - 4x + 2$ в интервала $[1; 5]$.

22. Пресметнете стойността на израза $3\sin 2\alpha - 2\operatorname{tg} \alpha$, ако $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ и $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$.

23. Пресметнете стойността на израза $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$, където x_1 и x_2 са корените на уравнението $2x^2 - 5x - 1 = 0$.

24. Да се реши уравнението $\sqrt{x+5} + 1 = x$.

25. Ъглополовящата AM на равнобедрения $\triangle ABC$ ($M \in BC$) пресича височината CD ($D \in AB$) в точка O . Намерете основата AB , ако $MB = 20$ cm и $CO : OD = 5 : 4$.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително опишете в свитъка за свободни отговори!

26. Три числа, сборът на които е 27, образуват аритметична прогресия. Ако към второто число се прибави 1, а към третото число се прибави 7, новите три числа ще образуват геометрична прогресия. Намерете първоначалните числа.

27. Училищният отбор по баскетбол има 15 състезатели – 10 нападатели и 5 защитници. По време на мач на терена играят само 5 от тях. Каква е вероятността при случаен избор в отбора на терена да има трима нападатели и двама защитници?

28. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност и описан около окръжност. Ако $AD = 3$, $DC = 4$ и $\angle ADC = 60^\circ$, да се намери лицето на четириъгълника.

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{при } D \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Формули на Виет: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Квадратна функция

Графиката на $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}, \quad a \neq 0 \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{при } a \geq 0, k \geq 2, n \geq 2 \text{ и } m, n, k \in \mathbb{N}$$

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \quad a^{\log_a b} = b \quad \log_a a^x = x \quad \text{при } a > 0, b > 0 \text{ и } a \neq 1$$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n = n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Брой на вариациите на n елемента k -ти клас: $V_n^k = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k -ти клас: $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Вероятност за настъпване на събитието A :

$$p(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n = a_1 + (n-1)d$ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1c$ $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ $m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$ $m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab \sin \alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α°	0°	30°	45°	60°	90°
$\alpha \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{cotg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
$\sin$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ГАБРОВО

СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА

Плевен, 20.02.2016 г.

ЛИСТ ЗА ОТГОВОРИ

Въпрос №	Отговор			
1	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
2	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
3	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
4	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
5	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
6	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
7	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
8	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
9	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
10	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
11	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
12	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
13	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
14	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
15	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
16	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
17	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
18	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
19	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г
20	☐ А	☐ Б	☐ В	☐ Г

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ГАБРОВО

СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА

Плевен, 20.02.2016 г.

СВИТЪК ЗА СВОБОДНИТЕ ОТГОВОРИ

Въпрос №	Отговор
21	
22	
23	
24	
25	

Описание на решенията на задачи 26, 27 и 28

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ГАБРОВО**СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА****Плевен, 20.02.2016 г.****Ключ с верните отговори**

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1	Б	2
2	А	2
3	Г	2
4	Г	2
5	В	2
6	А	2
7	Г	2
8	Б	2
9	В	2
10	Б	2
11	А	3
12	Б	3
13	В	3
14	В	3
15	В	3
16	А	3
17	Б	3
18	Г	3
19	Г	3
20	А	3
21	$\min_{x \in [1;5]} f(x) = f(2) = -2$ $\max_{x \in [1;5]} f(x) = f(5) = 7$	4
22	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	4
23	$-\frac{29}{8}$	4
24	$x = 4$	4
25	52 cm	4
26	5, 9, 13 или 20, 9, -2	10
27	$\frac{C_5^2 \cdot C_{10}^3}{C_{15}^5} = \frac{400}{1001}$	10
28	$4\sqrt{3}$	10

26. Критерии за оценяване (общо 10 точки)

1. Изразяване на членовете на двете прогресии (1 точка)

$$\div a_1, a_1 + d, a_1 + 2d$$

$$\div\div a_1, a_1 + d + 1, a_1 + 2d + 7$$

2. Съставяне на система (2 точки)

$$\begin{cases} (a_1 + d + 1)^2 = a_1(a_1 + 2d + 7) \\ a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 27 \end{cases}$$

3. Решаване на системата (5 точки)

4. Намиране на членовете на всяка от двете аритметични прогресии, които са решения на задачата (2 точки – по 1 точка за всяка от прогресиите)

27. Критерии за оценяване (общо 10 точки)

1. Намиране на всички начини за избор на 5 ученика от 15 (3 точки)

2. Намиране на всички начини за избор на трима нападатели и двама защитници от 10 нападатели и 5 защитници (5 точки)

3. Намиране на търсената вероятност (2 точки)

28. Критерии за оценяване (общо 10 точки)

1. Намиране на лицето на $\triangle ACD$ (2 точки)

2. Намиране на $\sphericalangle ABC$ (1 точка)

3. Намиране на зависимостта $AB + CD = BC + AD$ (1 точка)

4. Намиране на лицето на $\triangle ABC$ (5 точки)

5. Намиране на лицето на четириъгълника $ABCD$ (1 точка)