

**Секция “Изток” – СМБ**  
**ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 18.04.2015 г.**  
**12 клас**

**Времето за решаване е 120 минути.**

Име .....училище.....град.....

**ПЪРВА ЧАСТ**

**Всяка задача има само един верен отговор. „Друг отговор” се приема за решение само ако е отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки.**

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Числената стойност на израза  $(2\sqrt{2} - 3\sqrt{2})^2$  е равна на:

- A) 100                                  Б) 25                                  В) 2                                  Г) 1

2. Коя от следните двойки  $(x; y)$  принадлежи на дефиниционната област на дробта  $\frac{x-y}{xy+x^2y}$ ?

- A)  $(0;5)$                                   Б)  $(-3;0)$                                   В)  $(-2;-2)$                                   Г)  $(-1;5)$

3. Ако  $\lg 4 = k$  и  $\lg 3 = p$ , то  $\lg 18$  е равно на:

- A)  $k+3p$                                   Б)  $k+\frac{p}{2}$                                   В)  $\frac{k}{2}+p$                                   Г)  $\frac{k}{2}+2p$

4. Решенията на неравенството  $\frac{x^2-2x-3}{3x^2} \leq 0$  са:

- A)  $x \in [-1;0) \cup (0;3]$                                   Б)  $x \in [-3;1]$                                   В)  $x \in [-3;0) \cup (0;1]$                                   Г)  $x \in [-1;3]$

5. Коя от наредените двойки  $(x; y)$  е решение на системата  $\begin{cases} -x+y=1 \\ -x^2+y^2=5 \end{cases}$ ?

- A)  $(1;2)$                                   Б)  $(2;3)$                                   В)  $(-2;-3)$                                   Г)  $(1;-2)$

6. Ако  $x_1$  и  $x_2$  са корените на уравнението  $x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} = 0$ , то стойността на  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$  е:

- A)  $-2\sqrt{2}$                                   Б) 2                                  В)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                                   Г)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. Броят на реалните корени на уравнението  $(x^4 - 16)^2 \sqrt{x} = 0$  е:

- A) 1                                  Б) 2                                  В) 3                                  Г) 4

8. Стойността на израза  $4 - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$  е:

А) 4

Б)  $4 - \cos 2\alpha$

В)  $3 + \cos 2\alpha$

Г) 3

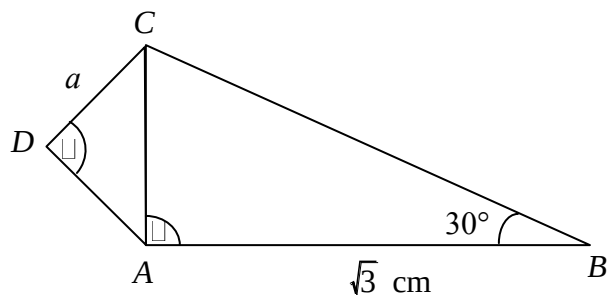
9. Катетът  $AC$  на правоъгълния  $\triangle ABC$  е хипотенуза на равнобедрения правоъгълен триъгълник  $\triangle ACD$ . Стойността на  $a$  в сантиметри е:

А)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Б)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

В)  $\sqrt{2}$

Г)  $\frac{\sqrt{6}}{4}$



10. Два от ъглите на един триъгълник са  $81^\circ$  и  $39^\circ$ , а радиусът на описаната около него окръжност е  $10\sqrt{3}$  cm. Дължината на средната по големина страна на този триъгълник в сантиметри е:

А) 60

Б) 40

В) 30

Г) 20

11. В правоъгълна координатна система с мерна единица 1 cm са построени графиките на функциите  $f(x) = x^2 + x - 5$  и  $g(x) = 7$ . Точка  $A$  е обща точка за двете графики и лежи във втори квадрант. Колко сантиметра е разстоянието от точка  $A$  до ординатната ос?:

А) 7

Б) 5

В) 4

Г) 3

12. Първият ред на киносалон с 18 реда има 29 места, а всеки следващ – с 2 повече. Колко са местата в киносалона?

А) 684

Б) 828

В) 1334

Г) 524

13. Редицата  $5; 3; \frac{9}{5}; \frac{27}{25}; \dots$  е геометрична прогресия. Десетият член на тази редица е:

А)  $\frac{3^9}{5^8}$

Б)  $\frac{3^8}{5^8}$

В)  $\frac{3^9}{5^9}$

Г)  $\frac{3^{10}}{5^9}$

14. Вероятността по случаен начин в думата БЪЛГАРИЯ да се подчертае гласна буква е:

А) 0,25

Б) 0,4

В) 0,5

Г) 1

15. Дадено е следното множество от данни 7, 5, 4, 6, 4, 2, 8, 5, 4. Средноаритметичното на модата и медианата е:

А) 4

Б) 4,5

В) 5

Г) 5,5

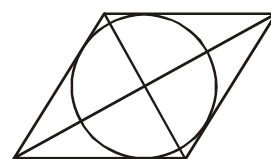
16. Страната на ромб е  $2\sqrt{2}$  cm и острият му ъгъл е  $45^\circ$ . Радиусът на вписаната в ромба окръжност е равен на:

А) 1 cm

Б)  $\sqrt{2}$  cm

В) 2 cm

Г)  $2\sqrt{2}$  cm

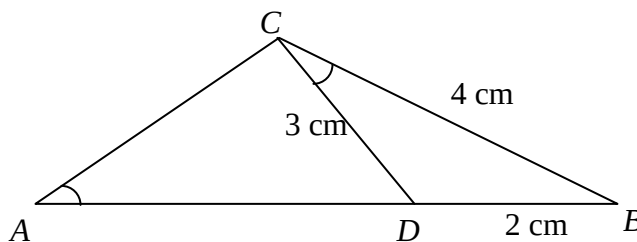


17. Лицето на ромб е два пъти по-малко от лицето на квадрат със същия периметър. На колко е равен по-големият ъгъл на ромба?

- А)  $175^\circ$                       Б)  $150^\circ$                       В)  $135^\circ$                       Г)  $120^\circ$

18. На чертежа,  $D$  е точка от отсечката  $AB$  и  $\angle CAB = \angle DCB$ . Колко сантиметра е периметърът на  $\triangle ADC$ ?

- А) 18  
Б) 15  
В) 13  
Г) 9

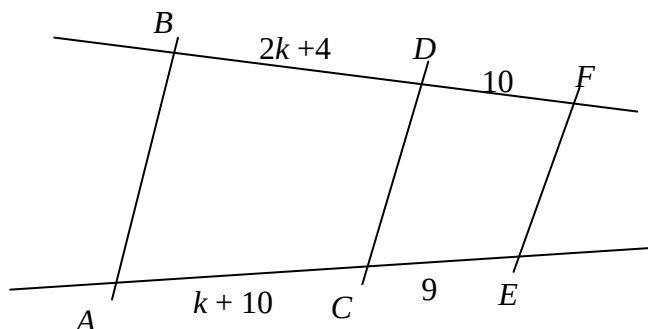


19. Равнобедреният трапец  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) има основи  $AB=6$ ,  $CD=4$  и бедро  $BC=5$ . Стойността на  $\cos \angle BAC$  е:

- А)  $\frac{2\sqrt{6}}{6}$                       Б)  $\frac{5}{6}$                       В)  $\frac{6}{7}$                       Г)  $\frac{5}{7}$

20. За коя стойност на  $k$  отсечките  $AB$ ,  $CD$  и  $EF$  са успоредни?

- А) 6  
Б) 8  
В) 16  
Г) 16



Отговорите на задачите от 21. до 25. запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Графиката на квадратната функция минава  $f(x) = x^2 + px + q$  през точките  $A(0; 6)$  и  $B(3; 0)$ . Да се намери сборът на коефициентите  $p$  и  $q$ .

22. Ако  $x$  е с 20% по-голямо от  $y$  и  $y$  е с 20% по-малко от  $z$ , то колко е  $\frac{x+y}{z}$ ?

23. Дължините на страните на правоъгълен триъгълник са последователни членове на геометрична прогресия. Ако по-малкият катет е равен на  $\sqrt{2}$ , да се намери другият катет.

24. Даден е триъгълникът  $ABC$  със страни  $AC=1$ ,  $BC=3$  и  $\angle ACB=120^\circ$ . Да се намери дължината на ъглополовящата през върха  $C$ .

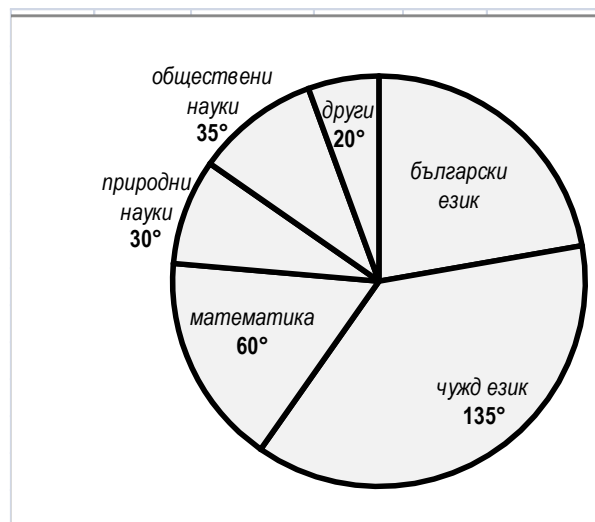
25. Средно аритметичното на 4 числа е 6 и средно аритметичното на 6 други числа е 4. На колко е равно средно аритметичното на тези 10 числа?

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Да се реши уравнението 
$$\frac{(y^2 + 2y - 4)^2 - 7(y^2 + 2y - 4) + 12}{y^2 + 2y} = 0$$

27. В училище работят 72 учители. Кръговата диаграма показва разпределението им по предмети.

Да се пресметне вероятността случайно срещнат от тях учител да преподава природни науки и да се намери по колко различни начина може да се сформира екип от трима учители – един по български език, един по математика и един по обществени науки.



28. Една от височините на триъгълник го разделя на две части с лица  $54 \text{ cm}^2$  и  $30 \text{ cm}^2$ . Страната, към която е построена височината, се дели от нея на отсечки, едната от които и с 4 cm по-дълга от другата. Да се намери отношението на радиуса на описаната окръжност към радиуса на вписаната в този триъгълник окръжност.

## ЛИСТ С ОТГОВОРИ

### Въпроси с избираем отговор

1.      ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
2.      ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
3.      ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
4.      ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
5.      ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
6.      ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
7.      ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
8.      ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
9.      ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
10.     ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г

11.     ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
12.     ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
13.     ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
14.     ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
15.     ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
16.     ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
17.     ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
18.     ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
19.     ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г
20.     ☐ А   ☐ Б   ☐ В   ☐ Г

---

### Въпроси със свободен отговор

21.

22.

23.

24.

25.

---

## ФОРМУЛИ

### Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{при } D \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Формули на Виет: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

### Квадратна функция

Графиката на  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  е парабола с връх точката  $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$

### Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[k+1]{a^{2k+1}} = a \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}, \quad a \neq 0 \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad \sqrt[n]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{при } a \geq 0, k \geq 2, n \geq 2 \text{ и } m, n, k \in \mathbb{N}$$

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \quad a^{\log_a b} = b \quad \log_a a^x = x \quad \text{при } a > 0, b > 0 \text{ и } a \neq 1$$

### Комбинаторика

$$\text{Брой на пермутациите на } n \text{ елемента: } P_n = n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

$$\text{Брой на вариациите на } n \text{ елемента } k\text{-ти клас: } V_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

$$\text{Брой на комбинациите на } n \text{ елемента } k\text{-ти клас: } C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

### Прогресии

$$\text{Аритметична прогресия: } a_n = a_1 + (n-1)d \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$\text{Геометрична прогресия: } a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

$$\text{Формула за сложна лихва: } K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

### Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник:  $c^2 = a^2 + b^2$   $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$   $a^2 = a_1c$   $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$   $r = \frac{a+b-c}{2}$   $\sin a = \frac{a}{c}$   $\cos a = \frac{b}{c}$   $\operatorname{tga} = \frac{a}{b}$   $\operatorname{cotga} = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos a$   $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos b$   $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos g$   $\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin g} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$   $m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$   $m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$

Формула за ъглополовяща:  $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$   $l_c^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник:  $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

### Формули за лице

Триъгълник:  $S = \frac{1}{2}ch_c$   $S = \frac{1}{2}ab \sin g$   $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$   $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник:  $S = ah_a$   $S = ab \sin a$  Трапец:  $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник:  $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin j$

Описан многоъгълник:  $S = pr$

### Тригонометрични функции

| $a^\circ$              | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$      |
|------------------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $a \text{ rad}$        | 0         | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin a$               | 0         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos a$               | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\operatorname{tga}$   | 0         | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | —               |
| $\operatorname{cotga}$ | —         | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               |

|      | $-\alpha$ | $90^\circ - a$ | $90^\circ + a$ | $180^\circ - a$ |
|------|-----------|----------------|----------------|-----------------|
| sin  | - sin a   | cosa           | cosa           | sina            |
| cos  | cosa      | sina           | - sina         | - cosa          |
| tg   | - tga     | cotga          | - cotga        | - tga           |
| cotg | - cotga   | tga            | - tga          | - cotga         |

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tga} \pm \operatorname{tgb}}{1 \mp \operatorname{tga} \operatorname{tgb}} \quad \operatorname{cotg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{cotga} \operatorname{cotgb} \mp 1}{\operatorname{cotgb} \pm \operatorname{cotga}}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \quad \operatorname{cotg} 2a = \frac{\operatorname{cotg}^2 a - 1}{2 \operatorname{cotga}}$$

$$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a) \quad \cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2} \quad 1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \quad \cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$



## РЪКОВОДСТВО ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

| Задача | Правилен отговор                                | Максимален бал                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|--------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | В                                               | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 2      | В                                               | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 3      | Г                                               | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 4      | А                                               | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 5      | Б                                               | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 6      | Б                                               | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 7      | Б                                               | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 8      | А                                               | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 9      | А                                               | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 10     | В                                               | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 11     | Г                                               | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 12     | Б                                               | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 13     | А                                               | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 14     | В                                               | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 15     | Б                                               | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 16     | Г                                               | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 17     | Б                                               | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 18     | Б                                               | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 19     | Г                                               | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 20     | В                                               | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 21     | 1                                               | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 22     | $\frac{44}{25} (=1\frac{19}{25})$               | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 23     | $\sqrt{1+\sqrt{5}}$                             | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 24     | 0,75 или $\frac{3}{4}$                          | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 25     | 4,8                                             | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|        |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| 26     | $\pm\sqrt{3}; 2; 4-1;$                          | <p style="text-align: center;"><b>Общо 10 точки</b></p> <p>За свеждане на уравнението в числителя до квадратно – 1 точка</p> <p>За решаване на квадратното уравнение – 2 точки</p> <p>За намиране на корените на биквадратното уравнение – 3 точки</p> <p>За намиране на корените на уравнението в знаменателя – 2 точки</p> <p>За изключване на –2 (или за определяне на ДО) – 2 точки</p>                                   |
| 27     | $\frac{1}{12}$ или 0,083...;<br>1342 (=16.12.7) | <p style="text-align: center;"><b>Общо 10 точки</b></p> <p>За намиране на броя на учителите по пр. науки – 1 точка</p> <p>За определяне на вероятността – 1 точка</p> <p>За намиране на отношението <math>5^\circ</math> – 1 учител – 2 точки</p> <p>За намиране на броя на учителите по БЕ – 2 точки</p> <p>За намиране на броя на учителите по математика и ОН – 2 точки</p> <p>За пресмятане на съединението – 2 точки</p> |

|    |         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 28 | 32 : 65 | <p style="text-align: center;"><b>Общо 10 точки</b></p> <p>За намиране на страната, която се дели от височината, <math>a = 14</math> – 3 точки</p> <p>За намиране на останалите страни 13 и 15 на триъгълника – 2 точки</p> <p>За намиране на радиуса 4 на вписаната окръжност – 2 точки</p> <p>За намиране на радиуса <math>\frac{65}{8}</math> на описаната окръжност – 2 точки</p> <p>За изчисляване на отношението – 1 точка</p> |
|    |         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |