

СМБ – Секция “Изток”
ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 23.04.2016 г.
7 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 16 има само един правилен отговор от четири възможни (отбелязани с а), б), в), г)). За задачите от 17. до 22. трябва да бъдат записани само отговорите, а задачи 23. и 24. трябва да бъдат подробно решени. Задачите от 1 до 4 се оценяват с по 1 точка; задачи от 5 до 10 – с по 2 точки; задачи от 11 до 16 – с по 3 точки; задачи от 17 до 20 – с по 5 точки; задачи 21 и 22 – с по 8 точки и задачи 23 и 24 – с по 15 точки. Максималният брой точки е 100. Неправилни решения и задачи без отговор се оценяват с 0 точки.

Организаторите Ви пожелават успех !

Име..... училище..... град.....

1. Кое от равенствата е тъждество:

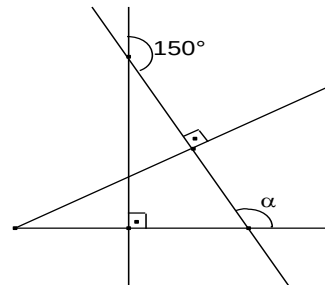
- а) $|x|^3 = x|x|^2$ б) $|x|^3 = x^2|x|$ в) $|x^3| = x^3$ г) $|x|^3 = x^3$

2. Ако a и b са цели числа, за които е вярно $4 \leq |a| \leq 8$ и $|b| < 5$, то най-малката възможна стойност на $a + b$ е:

- а) -12 б) -11 в) -8 г) 11

3. Според данните на чертежа, градусната мярка на ъгъл α е:

- а) 30° б) 60° в) 120° г) 150°

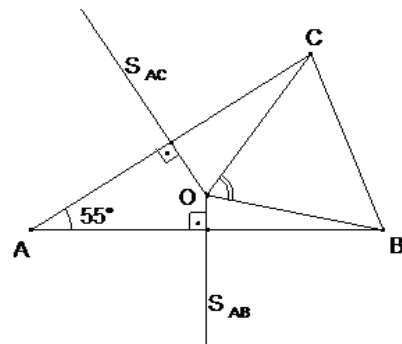


4. Числената стойност на израза $\frac{a}{b} - 3,4a + 7,2 : b - \left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$, пр $a = -2$ и $b = -3^2$ е:

- а) $-7,6$ б) -6 в) 6 г) $7,6$

5. Симетралите на страните AB и AC в $\triangle ABC$ се пресичат в точката O . Ако $\angle BAC = 55^\circ$, то градусната мярка на $\angle BOC$ е:

- а) 55° б) $62,5^\circ$ в) 110° г) 125°

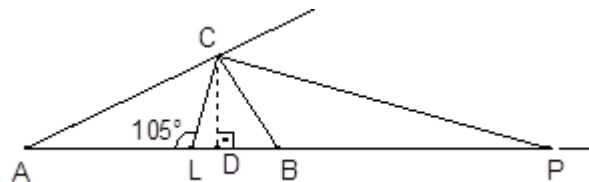


6. В математическо състезание взели участие 80% от учениците в един клас. От тях 20 % се представили много добре. Колко процента от учениците в класа са се представили много добре на това състезание?

- а) 4 % б) 16 % в) 40 % г) 60 %

7. CL и CP са ъглополовящи съответно на вътрешния и външния ъгъл при върха C на $\triangle ABC$. Ако разстоянието от точка C до правата AB е 2 см, а $\angle ALC = 105^\circ$, то произведението $CL \cdot CP$ е равно на:

- а) 8 б) 4 в) 32 г) 16



8. При кои стойности на променливата x изразите $A = 4x^2$ и $B = -3x$ НЯМАТ равни стойности?

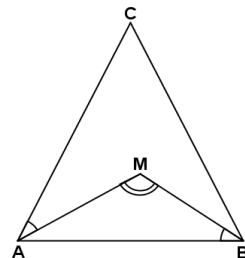
- а) $\forall x \neq 0$ б) $\forall x \neq -\frac{3}{4}$ в) $\forall x \neq -\frac{4}{3}$ г) $\forall x \neq -\frac{3}{4}$ и 0

9. В 300 грама сок има 90 грама захар. Колко процента е захарта в един литър от същия сок?

- а) 300% б) 30% в) 10% г) 33%

10. Във вътрешността на равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) е взета точка M , така че $\angle MAC = \angle MBA$. Ако $\angle AMB = 105^\circ$, то на колко градуса е равен $\angle ACB$?

- а) 30° б) 45° в) 60° г) 90°



11. Какво разстояние е пробягал атлет, направил 8 обиколки по пистата, ако тя е получена като към квадрат със страна 100 м са очертани 2 полуокръжности?

- а) повече от 5 км б) между 4 и 5 км в) между 3 и 4 км г) между 2 и 3 км

12. Двама работници могат заедно да извършат дадена работа за 6 дни. Ако единият от тях увеличи производителността си с 28%, а другият намали производителността си с 28%, двамата заедно ще свършат работата за 5 дни. За колко дни всеки от тях може сам да свърши работата?

- а) 6 дни и 12 дни; б) 6 дни и 30 дни в) 7 дни и 42 дни г) 9 дни и 30 дни

13. Даден е равнобедрен тъпоъгълен $\triangle ABC$ ($AB = BC$). Ако CH и BM са съответно височина и медиана и $\angle BAC = 25^\circ$, намерете големината на $\angle BMH$.

- а) 30° б) 35° в) 40° г) 50°

14. Нечетното двуцифрено число, чиито цифри са двата корена на уравнението $x^2 - 13x + 42 = 0$ е:

- а) 13 б) 17 в) 37 г) 67

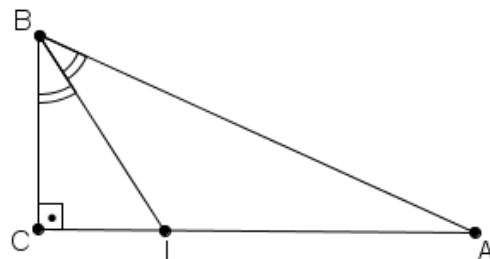
15. Даден е $\triangle ABC$, в който $\angle CAB = 120^\circ$ и AD ($D \in BC$) е ъглополовяща на този ъгъл. Върху лъча AD е взета точка P така, че $AP = AB + AC$. Мярката на $\angle BPC$ е:

- а) 45° б) 60° в) 75° г) 90°

16. За правоъгълния $\triangle ABC$ от чертежа е построена ъглополовящата BL .

Ако $AL = 2 \cdot CL$, то мярката на $\angle ABC$ е:

- а) 60° б) 45° в) 30° г) 15°

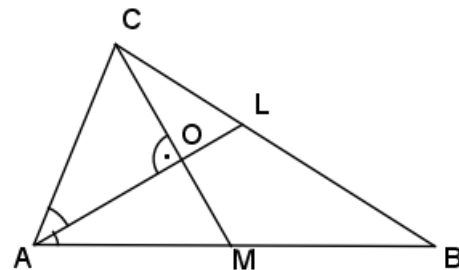


17. Катя трябвало да умножи числото 272 с двуцифрено число, на което единиците са два пъти повече от десетиците. От разсеяност тя разместила цифрите на двуцифреното число и получила произведение, което е с 2448 по-голямо от истинското. Кое е първоначалното двуцифрено число?

18. Числата a , b и c са такива, че $b \neq c$, $a^2 + ab + c = 0$ и $a^2 + ac + b = 0$. Да се изчисли $b + c$.

19. Точките M и N са разположени съответно върху страните AB и AC на $\triangle ABC$ така, че $BN \perp CM$ и $\angle BNC = \angle BMC$. Ако $\angle MCB : \angle NBC : \angle BAC = 5 : 4 : 3$, да се намери големината на $\angle ACB$.

20. В $\triangle ABC$ страната AB е 2 пъти по-голяма от медианата CM ($M \in AB$). CM пресича ъглополовящата AL на $\angle BAC$ ($L \in BC$) в точка O . CM е перпендикулярна на AL и $OL = 1$ см. Намерете дължината на страната BC .



21. В точка O , в близост до морския бряг, се намира радар, който излъчва радиосигнал с обхват окръжност с радиус OA . В точка M се намира кораб, който е пуснал котва (неподвижен е). Монитор на борда на кораба излъчва следното изображение – квадратна мрежа, в която маркираната триъгълна област ABM (т. $O \in AB$) обозначава къде радиосигналът е най-силен. Лицето на едно квадратче от квадратната мрежа отговаря на 9 кв.км в действителност.

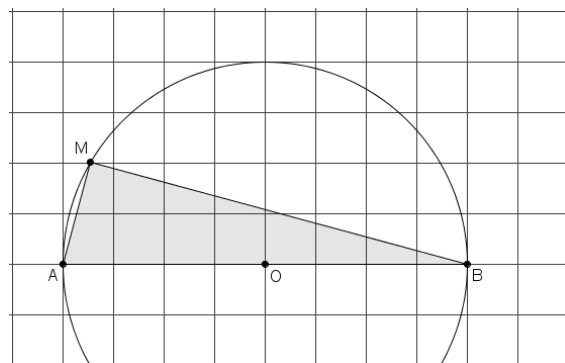
а) На какво действително разстояние е равен диаметърът AB на окръжността и на какво разстояние се намира корабът от правата AB ?

б) Какъв е видът на триъгълник ABM според ъглите? Обосновете отговора си.

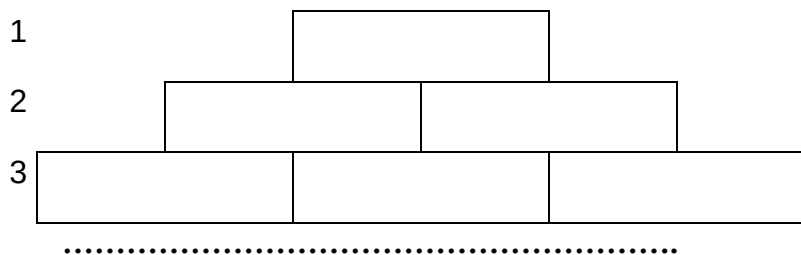
в) Колко км е разстоянието между местоположенията на радара и кораба?

г) Какви са мерките на ъглите на триъгълник ABM ?

д) Колко кв.км е площта с най-силен радиосигнал?



22. Майстор залепва еднакви плочки на стена както е показано на чертежа, на всеки следващ ред по една в повече.



а) Колко плочки трябва да закупи майсторът, за да залепи всички плочки до пети ред включително?

б) Ако майсторът е залепил 36 плочки, то на кой ред ще залепи 37 плочка?

в) Нека майсторът е залепил плочки до ред с номер $2n$ включително. Изразете чрез n броя на плочките, които той е залепил.

23. Да се намери стойността на израза $a - |-b| - c$, където:

- a е най-малката стойност на израза $A = x^2 - 7x + 0,25$;
- b е стойността на параметъра m , за която уравнението $m(x - m) = 2(x + 2) - 4m$ има единствен корен, равен на 5;
- ако $x + y = 3$ и $x^3 + y^3 = 9$, то c е стойността на израза $4x^2y^2$.

24. Височините AN и CP в остроъгълния $\triangle ABC$ се пресичат в точка O . Ако $AO = BC$ и $\angle ABC = 75^\circ$, намерете ъглите на триъгълник ABC .

Решения на задачите:

Зад. 23

▪ $A = x^2 - 7x + \frac{1}{4} = x^2 - 2 \cdot \frac{7}{2}x + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} + \frac{1}{4} = \left(x^2 - \frac{7}{2}\right) - 12 \Rightarrow a = -12$ **5т.**

▪ $b = 7$ **4т.**

$$m(x - m) = 2(x + 2) - 4m$$

$$mx - m^2 = 2x + 4 - 4m$$

$$mx - 2x = m^2 - 4m + 4$$

$$(m - 2)x = (m - 2)^2$$

1. при $m = 2$, решенията са за всяко x

2. при $m \neq 2$, $x = m - 2$ и $m - 2 = 5 \Rightarrow b = m = 7$ **1т.**

▪ $c = 16$ **4т.**

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 9, x^2 + 2xy - 3xy + y^2 = 3, (x + y)^2 - 3xy = 3, 9 - 3xy = 3, xy = 2$$

$$c = 4(xy)^2 = 4 \cdot 2^2 = 16$$

▪ $a - |-b| - c = -12 - 7 - 16 = -35$ **1т.**

Зад. 24

1. Изготвяне на правдоподобен чертеж – **1т.**

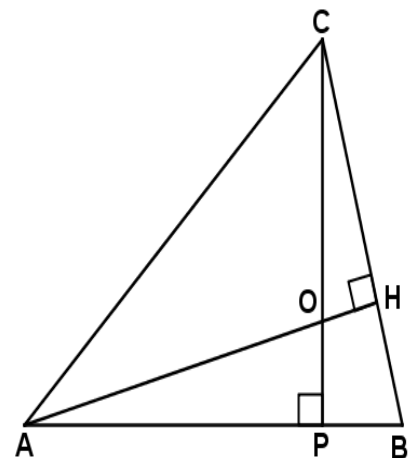
2. Доказателство, че $\angle HAB = \angle PCB$ - **3т.**

3. Доказателство, че $\triangle AOP \cong \triangle CBP$ - **4т.**

4. Извод, че $AP = CP$ - **2т.**

5. Извод, че $\triangle ACP$ е равнобедрен
правоъгълен и $\angle PAC = \angle PCA = 45^\circ$ - **3т.**

6. Намиране на $\angle ACB = 60^\circ$ - **2т.**



Бланка за отговори

Име..... Училище..... град.....

Зад. №	отг.	отг.	отг.	отг.
1	а	б	в	г
2	а	б	в	г
3	а	б	в	г
4	а	б	в	г

Брой верни отговори х 1 точка = точки

Зад. №	отг.	отг.	отг.	отг.
5	а	б	в	г
6	а	б	в	г
7	а	б	в	г
8	а	б	в	г
9	а	б	в	г
10	а	б	в	г

Брой верни отговори х 2 точки = точки

Зад. №	отг.	отг.	отг.	отг.
11	а	б	в	г
12	а	б	в	г
13	а	б	в	г
14	а	б	в	г
15	а	б	в	г
16	а	б	в	г

Брой верни отговори х 3 точки = точки

Зад.№	Резултат	точки
17	12	
18	-1	
19	80°	
20	6 см	

Брой верни отговори х 5 точки = точки

Зад.№	Резултат	точки
21а	24 км, 6 км	2
21б	Правоъгълен /ОМ е медиана и $ОМ=1/2АВ/$	1
21в	12 км	2
21г	75°, 15°, 90°	2
21д	72 кв. км	1
22а	15	2
22б	9-ти ред	3
22в	$n(2n+1)$	3

Зад.№	Точки
23	
24	

Общ брой точки:

Проверил:.....

Бланка за отговори

Име..... Училище..... град.....

Зад. №	отг.	отг.	отг.	отг.
1	а	б	в	г
2	а	б	в	г
3	а	б	в	г
4	а	б	в	г

Брой верни отговори х 1 точка = точки

Зад. №	отг.	отг.	отг.	отг.
5	а	б	в	г
6	а	б	в	г
7	а	б	в	г
8	а	б	в	г
9	а	б	в	г
10	а	б	в	г

Брой верни отговори х 2 точки = точки

Зад. №	отг.	отг.	отг.	отг.
11	а	б	в	г
12	а	б	в	г
13	а	б	в	г
14	а	б	в	г
15	а	б	в	г
16	а	б	в	г

Брой верни отговори х 3 точки = точки

Зад.№	Резултат	точки
17		
18		
19		
20		

Брой верни отговори х 5 точки = точки

Зад.№	точки
21а	
21б	
21в	
21г	
21д	
22а	
22б	
22в	

Зад.№	точки
23	
24	

Общ брой точки:

Проверил:.....