

СМБ – Секция “Изток”
КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 10.12.2016 г.
12 клас

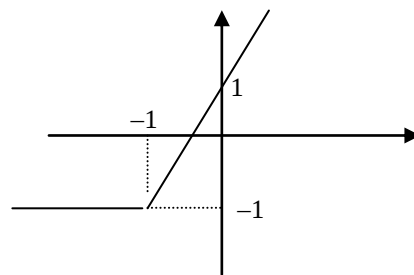
Времето за решаване е 120 минути.
Организаторите Ви пожелават успех !

Име.....училище.....град.....

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен отговор. „Друг отговор” се приема за решение само, ако е отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки.

1. Ако $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = m$, то $x + \frac{1}{x}$ е равно на:
а) $m^2 - 2$ б) $\sqrt{m} + 2$ в) m^2 г) друг отговор
2. Стойността на израза $\sqrt{1 - \frac{16 - k^2}{16}}$ при $k < 0$ е:
а) $1 + k$ б) $-\frac{k}{8}$ в) $-\frac{k}{4}$ г) друг отговор
3. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 3x + 1 = 0$, то x_1^2 и x_2^2 са корени на уравнението:
а) $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ б) $x^2 - 9x + 2 = 0$ в) $x^2 - 7x + 1 = 0$ г) друг отговор
4. Най-големият ъгъл в триъгълник със страни 5, 6 и $\sqrt{91}$ е равен на:
а) 150° б) 135° в) 120° г) друг отговор
5. Страните на правоъгълен триъгълник с периметър 48 образуват аритметична прогресия. Радиусът на описаната около този триъгълник окръжност е равен на:
а) 24 б) 20 в) 8 г) друг отговор
6. Разстоянието между пресечните точки на графиките на функциите $f(x) = x^2 + 4x - 2$ и $g(x) = -2x - 2$ е равно на:
а) 6 б) 0
в) 2 г) друг отговор
7. На чертежа е показана графиката на функцията:
а) $y = x - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ б) $y = x + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$
в) $y = -1 + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ г) друг отговор
8. Шифър се състои от 4 цифров код, като се знае, че първата цифра не е нито 5, нито 7, а последната е 2 или 8. Колко е броят на комбинациите на шифъра, ако в него няма повтарящи се цифри?
а) 784 б) 896 в) 1024 г) друг отговор
9. Сборът на 4 последователни нечетни числа a , b , c и d е 32. Медианата на статистическия ред $\{a, a + b, a + c, a + d, 32\}$ е:
а) 16 б) 24 в) 32 г) друг отговор



10. В ромб, който се дели от свой диагонал на два равностранни триъгълника, е вписана окръжност с радиус $\sqrt{3}$. Лицето на ромба е равно на:
- а) $8\sqrt{3}$ б) $16\sqrt{3}$ в) 32 г) друг отговор

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се запише.
Задачите се оценяват с по 5 точки.

11. Стойността на израза $\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}+3)^2}$ е:
Отговор
12. Намерете $\frac{x}{y}$, ако $\frac{4x^2 + |x+5| + 4xy + y^2}{y-5} = 0$
Отговор

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите три задачи трябва да се напише подробно решението.
Задачите се оценяват с по 10 точки.

13. Решете неравенството $\frac{(x^4 - 2401)}{\sqrt{-625 + x^4}} \leq 0$.
14. В кутия има бели, зелени и червени топчета. Белите и зелените общо са 42, зелените и червените – 44, а белите и червените – 38. Каква е вероятността случайно извадена от кутията топка да не е нито бяла, нито зелена?
15. В правоъгълна координатна система Oxy са дадени точките $A(-2;1)$, $B(1;-2)$, $C(x;0)$, $D(0;x)$. Намерете стойностите на x , за които в четириъгълника с върхове дадените точки може да се впише окръжност.

Първа част

1	2	3	4	5
a	b	b	b	$\Gamma - 10$
6	7	8	9	10
$\Gamma - 6\sqrt{5}$	b	a	$\Gamma - 14$	A

Втора част

11. $\sqrt{12} - \sqrt{8}$

$2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

12. $-\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} (2x + y)^2 + |x + 5| = 0 \\ y \neq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 10 \end{cases}$$

Трета част

13. Уравнението е еквивалентно на уравнението $(x^4 - 2401)\sqrt{-625 + x^4} \leq 0$ (2 точки) при $x^2 - 25 > 0$, т.е. при $x < -5$ и $x > 5$ (2 точки). Лявата част е отрицателна при $x^2 - 49 \leq 0$. (3 точки) Окончателно $x \in [-7; -5) \cup (5; 7]$. (3 точки)

14. Имаме системата $b + z = 42$; $z + ч = 44$ и $b + ч = 38$. (2 точки) Оттук $b + z + ч = 62$, (3 точки) от които червените са 20 (3 точки). Търсената вероятност е: $\frac{20}{62}$ (2 точки)

15. Четириъгълник може да се впише в окръжност само, когато $AB + CD = BC + AD$. (1 точка)

От формулата за разстояние между две точки в координатната система $\Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$, $CD = |x|\sqrt{2}$,

$BC = AD = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ и $AC = BD = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$. (3 точки)

При $x > 0 \Rightarrow 3\sqrt{2} + x\sqrt{2} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 5}$ с положителни корени $x_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$. (3 точки)

При $x < 0 \Rightarrow 3\sqrt{2} - x\sqrt{2} = 2\sqrt{x^2 + 4x + 5}$ с отрицателни корени $x_{3,4} = -7 \pm 4\sqrt{3}$. (3 точки)

Решения на задачата са $5 \pm 2\sqrt{6}$ и $-7 \pm 4\sqrt{3}$.