

Секция "Изток" – СМБ
ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 22.04.2017г.

11 -12 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Име.....училище.....град.....

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен отговор. „Друг отговор“ се приема за решение само, ако е отбелязан верен резултат. Всяка задача се оценява с по 2 точки.

- 1.** Общият член на числова редица е $a_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{n+1} - 2^n}{(-2)^{n-1}}$, $n \in N$. Стойността на a_{2017} е равна на:
а) 1 б) 2 в) 3 г) 4
- 2.** Стойността на израза $\frac{\sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{162}}$ е:
а) 2 б) 4 в) 9 г) 27
- 3.** Вероятност на събитие не може да бъде числото:
а) $2 \cdot 3^{-1}$ б) $(-2)^{-2}$ в) $\log_2 1$ г) $\log_2 \frac{1}{2}$
- 4.** Числата 2, 6, 18, ..., 1458 образуват прогресия. Броят на членовете на тази прогресия е:
а) 4 б) 6 в) 7 г) друг отговор
- 5.** Стойността на израза $\sin \alpha - \cos 2\alpha + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \cot g \frac{\alpha}{2}$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ е:
а) $1 - \sqrt{3}$ б) 0 в) $3 + \sqrt{3}$ г) друг отговор
- 6.** Медианата на извадката 3, 4, 5, 3, 12, 5, 3 е:
а) 3 б) 4 в) 5 г) друг отговор
- 7.** Общият член на числова редица е $a_n = 21 + \sqrt{n^2 - 8n + 16}$, $n \in N$. Номерът, n за който a_n приема най-малка стойност е:
а) 1 б) 4 в) 21 г) друг отговор
- 8.** Членовете на геометрична прогресия са цели числа, за които $a_3 a_4 a_5 = 2^9$. Броят на възможните стойности на частното на прогресията е:
а) 1 б) 2 в) 8 г) друг отговор
- 9.** В $\triangle ABC$ $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 120^\circ$. Отношението, $BC : AC : AB$ е равно на:
а) $1 : \sqrt{3} : 1$ б) $\sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$ в) $2 : \sqrt{3} : 2$ г) друг отговор
- 10.** Ако $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ са корени на уравнението $x^2 - 3x - 3 = 0$, то стойността на израза $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta$ е:
а) 12 б) 13 в) 14 г) друг отговор

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се запише. Задачите се оценяват с по 5 точки.

- 11.** Сума от 1000 лв. е вложена в банка при сложна лихва и след три години тя е нараснала на 1061,21 лв. Лихвеният процент е:
Отговор:.....
- 12.** $ABCD$ е четириъгълник със страни $AB = 4\text{см}$, $BC = 6\text{см}$, $CD = 2\text{см}$ и $AD = 3\text{см}$, който е вписан в окръжност. Диагоналът BD има дължина:
Отговор:.....

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите три задачи трябва да се напише подробно решението. Задачите се оценяват с по 10 точки.

- 13.** Решете неравенството $2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 > 0$.
- 14.** Числата $2x^2$, $\frac{3}{2}$ и $5x$ са последователни членове на намаляваща аритметична прогресия. Намерете нейната разлика.
- 15.** Основата на равнобедрен триъгълник е 4, косинус на ъгъла при основата е $\frac{1}{3}$. Намерете дължината на медианата към бедрото и отношението на радиусите на описаната и вписаната за триъгълника окръжности.

Отговори 11 -12 клас

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Б	А	Г	В	Г 2	Б	Б	В	А	Г 15	2%	$\frac{\sqrt{130}}{2}$

Задача 13:

Представяме неравенството $(8x^4 + 4x^3) + (2x^2 + x) > 0$

Изнасяме общ множител $4x^3(2x+1) + x(2x+1) > 0$

Окончателно разлагане $x(2x+1)(4x^2+1) > 0$

Последният множител е винаги положителен

Решенията на неравенството $x(2x+1) > 0$ са $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$

Указания: за правилно разлагане **6 точки**
 за отчитане, че $(4x^2+1) > 0$ **2 точки**
 за окончателно решение **2 точки**

Задача 14:

От свойството на прогресията $\frac{3}{2} = \frac{2x^2 + 5x}{2}$ **1 точка**

Получаваме уравнението $2x^2 + 5x - 3 = 0$, **2 точки**

с корени $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$ **2 точки**

Прогресията е намаляваща при $x = -3$ (отхвърляне на другия отговор) **2 точки**

Тогава прогресията е $\div 18, \frac{3}{2}, -15, \dots$

Разликата на прогресията е $d = a_2 - a_1 = \frac{3}{2} - 18 = -\frac{33}{2}$ **3 точки**

Задача 14:

Нека триъгълникът е $\triangle ABC$ ($AC = BC$), CH ($H \in AB$) е височина към основата, AM ($M \in BC$) е медиана към бедрото.

$\cos \alpha = \frac{AH}{AC} = \frac{2}{AC} = \frac{1}{3}$, тогава $AC = BC = 6$

От косинусова теорема за $\triangle ABM$ или от формулите за медиана намираме $AM = \sqrt{17}$

По Херонова формула или чрез намиране на CH , за лицето получаваме $S_{ABC} = 8\sqrt{2}$

От синусова теорема или от формулата $S = \frac{abc}{4R}$ получаваме $R = \frac{9\sqrt{2}}{4}$

От осн. свойство на ъглополовящата в $\triangle AHC$ или от формулата $S = pr$ получаваме $r = \sqrt{2}$

Тогава $R:r = 9:4$

Указания: за намиране на медианата **3 точки**
 за намиране на R **3 точки**
 за намиране на r **3 точки**
 за намиране на $R:r$ **1 точка**