СМБ – Секция “Изток”
КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 08.12.2018 г.
11 клас и 12 клас

Времето за решаване е 120 минути.
Организаторите Ви пожелават успех !

Име…………………………………………….училище……………...............град…………...

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен отговор. „Друг отговор” се приема за решение само, ако е отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки.

1. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2-5x-1=0$, то стойността на израза $A=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ е равна на:

а) $\dfrac{5-\sqrt{29}}{5+\sqrt{29}}$ б) $2\sqrt{29}$ в) 5 г) друг отговор

2. Сборът на две ненулеви числа е равен на тяхното произведение. Ако едното число е два пъти по-голямо от другото, то произведението на двете числа е:

а) 1,5 б) 4,5 в) 9 г) друг отговор

3. Дадена е петчленна аритметична прогресия ÷ 2; *a*; *b*; *c*; 14. Сборът *a* + *b* + *c* е равен на:

а) 8 б) 16 в) 24 г) друг отговор

4. Числата $\sqrt{2}$, 2^{x+2} и $2\sqrt{2}$ в този ред са последователни членове на геометрична прогресия. Стойността на *x* е равна на:

а) –1 б) –0,5 в) 0,5 г) друг отговор

5. В кутия има 5 бели и 3 сини топки. Броят на начините, по които случайно можем да извадим 3 бели и 2 сини топки е равен на:

а) $C_8^3.C_8^2$ б) $V_5^3.V_3^2$ в) $C_5^3.C_3^2$ г) друг отговор

6. В ΔABC е изпълнено $\measuredangle ACB=\measuredangle ABC+\measuredangle BAC$. Окръжност с диаметър *AC* пресича *AB* в точка *M* така, че *BC* = 2*CM* и *AM* = 5 cm. Страната *AB* е равна на:

а) 20 cm б) 15 cm в) 10 cm г) друг отговор

7. Ако $\lg 5=k$, то стойността на $\lg 20$ е равна на:

а) 4*k* б) 4 + *k* в) 2 – *k* г) друг отговор

8. Основите на правоъгълен трапец са 20 cm и 25 cm, а по-малкият му диагонал е $4\sqrt{34}$. По-голямото бедро на трапеца е равно на:

а) 7 cm б) 10 cm в) 12 cm г) друг отговор

9. Дадени са окръжностите $k_1(O_1;R_1=5\text{ cm})$ и $k_2(O_2;R_2=3\text{ cm})$. Дължината на O_1O_2 е число, произволно избрано от множеството {0 cm, 1 cm, 2 cm, 3 cm, 5 cm, 6 cm, 8 cm, 10 cm, 12 cm, 15 cm}. Вероятността двете окръжности да се допират е равна на:

а) 5 % б) 10 % в) 20 % г) друг отговор

10. Стойностите на реалното число *k*, за което уравнението $(x-2)(x^2-4x-k)=0$ има единствен реален корен, независимо от кратността му, са:

а) $k=-4$ б) $k\le -4$ в) $k<-4$ г) друг отговор

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се запише. Задачите се оценяват с по 5 точки.

11. Вписаната в ромба $ABCD$ окръжност се допира до страната AB в точка P. Ако радиусът на окръжността е $r = 12$ и $AP = 16$, то периметърът на ромба е равен на:

Отговор ……………….

12. Ако единият от корените на квадратното уравнение $x^2 - 8x + a = 0$ е три пъти по-голям от другия, то стойността на параметъра a е равна на:

Отговор …………………

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите две задачи трябва да се напише подробно решението. Задачите се оценяват с по 10 точки.

13. Дадено е уравнението $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{x^2+1}{x}\right) + p = 0$, където p е реален параметър.

а) Решете уравнението при $p = 2$.

б) Намерете всички стойности на реалния параметър p, за които уравнението има точно три различни реални корени.

14. Равностранен ΔABC със страна 6 cm е вписан в окръжност. Точка M е от малката дъга BC така, че $MB = 2\sqrt{3}$ cm. Докажете, че в четириъгълник $ABMC$ може да се впише окръжност и намерете нейния радиус.

Първа част

1	2	3	4	5
Г (–5)	Б	В	А	В
6	**7**	**8**	**9**	**10**
А	В	Г – 13 cm	В	Б

Втора част

11. 100
12. 12

Трета част

13зад.
Оценяване: а) 4 точки

Полагане $t = \frac{x^2+1}{x}$ и получаване на $t^2 - 3t + 2 = 0$ _1 точка_

Получаване на корените 1 и 2 _1 точка_

$\frac{x^2+1}{x} = 1$ няма корени _1 точка_

$\frac{x^2+1}{x} = 2$ има един двоен корен $x = 1$ _1 точка_

б) 6 точки

Разглеждаме полагането $t = \frac{x^2+1}{x} \Leftrightarrow x^2 - tx + 1 = 0$ (1). За всяко t уравнението има 0, 1 или 2 различни реални корена. _1 точка_

За да има началното уравнение точно три реални и различни корена, то t_1 и t_2 трябва да са такива, че за единия от тях да има единствен корен за x, а за другия – два корена.
2 точки

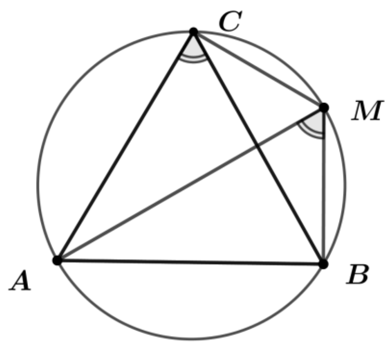
От дискриминанта на (1) $D = t^2 - 4$ уравнението има единствен корен при $t = \pm 2$ и два корена при $t \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ _1 точка_

1. Случай $t_1 = 2$ от $t^2 - 3t + p = 0$ получаваме p = 2, а от подточка а) уравнението има единствен корен _1 точка_
2. Случай $t_1 = -2$ от $t^2 - 3t + p = 0$ получаваме $p = -10$ и $t_2 = 5 > 2$, което удовлетворява условието. _1 точка_

14 зад. Разглеждаме ΔABC $\measuredangle AMB = \measuredangle ACB = 60^\circ$ като вписани.
От косинусова теорема $AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM.BM.\cos 60^\circ$

$36 = AM^2 + 12 - 2AM.2\sqrt{3}.\frac{1}{2} \quad \Rightarrow AM = 4\sqrt{3}$ cm. Тъй като радиусът на описаната окръжност $R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$, то AM е диаметър. Триъгълниците ABM и ACM са еднакви правоъгълни $AB = AC$ и $MB = CB \Rightarrow AB + CM = AC + BM \Rightarrow ABMC$ е вписан.

$S_{ABMC} = 2S_{ABM} = 2.\frac{AB.BM}{2} = 12\sqrt{3}\text{cm}^2$.



$$p_{ABMC} = AB + BM = 6 + 2\sqrt{3} \text{ cm}, \quad r = \frac{S}{p} = \frac{12\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} - 3$$

Оценяване:

Намиране на ъглите на *AM*	*3 точки*
Доказване,че *ABM* и *ACM* са еднакви правоъгълни	*2 точки*
Доказване, че четириъгълникът е вписан	*2 точки*
Намиране на радиуса	*3 точки*

Забележка: Доказването, че *AM* е диаметър и еднаквостта на триъгълниците може да стане и чрез синусова теорема.

Всеки друг вариант за решение може да се оценява по избран от проверяващите начин.