СМБ – Секция "Изток"
ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – **20.04.2019 г.**
11 клас и 12 клас

Времето за решаване е 120 минути.
Организаторите Ви пожелават успех !

Име…………………………………………..училище……………................град…………...

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен отговор. „Друг отговор" се приема за решение само, ако е отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки.

1. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2-2x-5=0$, то сборът $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ е равен на:

а) $\frac{1+\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}$ б) $\frac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}$ в) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ г) друг отговор

2. Сборът на две числа **е** 24, а разликата от вторите им степени е 48. Разликата на дадените числа е равна на:

а) 2 б) 11 в) 13 г) друг отговор

3. Числата $3x+5$, $x+25$ и $20-2x$ са последователни членове на аритметична прогресия. Разликата на прогресията е равна на:

а) –70 б) –25 в) 70 г) друг отговор

4. Всички допустими стойности на израза $\frac{\sqrt[3]{x-5}}{1-\lg(5-x)}$ са:

а) $x\in\varnothing$ б) $x\neq 5$ в) $x<5$ г) друг отговор

5. Кое от числата **НЕ** може да бъде вероятност на случайно събитие?

а) $\operatorname{tg}30^\circ$ б) $\cos 120^\circ$ в) $\sin 180^\circ$ г) $\cos 90^\circ$

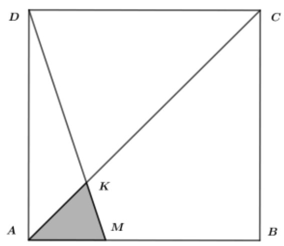
6. Намерете най-голямата страна на триъгълник, ако тя е равна на радиуса на описаната окръжност, а другите две страни са a и $a\sqrt{3}$.

а) $a\sqrt{5}$ б) $a\sqrt{6}$ в) $a\sqrt{7}$ г) друг отговор

7. Кой от изразите е тъждествен на $8^{\log_2 x}$ при $x > 0$:

а) $3x$ б) $3 + x$
в) x^3 г) друг отговор

8. Точка M лежи на страната AB на квадрата $ABCD$ така, че $AM:MB = 1:2$. $AC \cap MD = K$. Ако лицето на ΔAKM е 4 cm^2, то лицето на $ABCD$ е:



а) 36 cm^2 б) 72 cm^2
в) 96 cm^2 г) друг отговор

9. Заплатата на началникът на една фирма е 2100 лв., а двамата му заместника вземат средно по 1600 лв. Във фирмата работят 5 специалисти със средна заплата 1200 лв. и 12 работника, които получават по 800 лв. Средната заплата във фирмата е равна на:

а) 1025 лв. б) 1045 лв. в) 1425 лв. г) друг отговор

10. Стойностите на реалното число k, за които уравнението $\sqrt{(x-1)(2019-x)}=k$ има единствен реален корен са:

а) $k = 1010$ б) $k = 1009$ в) $k=\sqrt{2019}$ г) друг отговор

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се запише. Задачите се оценяват с по 5 точки.

11. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност така, че $AB:BC:CD:DA=3:4:2:3$. Ако радиусът на окръжността е 2, то лицето на $ABCD$ е равно на:

Отговор ………………

12. Стойността на изразът $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$ при $\alpha=15°$ е равна на:

Отговор …………………

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите две задачи трябва да се напише подробно решението. Задачите се оценяват с по 10 точки.

13. Три числа със сбор 30 са последователни членове на аритметична прогресия. Ако към първото число прибавим 3, а към третото 2, трите числа ще бъдат последователни членове на геометрична прогресия. Намерете началните числа.

14. Окръжност k се допира до основата AB на равнобедрен ΔABC в точка A, минава през върха C и пресича бедрото BC в точка M така, че $CM:MB = 3:1$. Ако $AM = 4$, намерете страните на ΔABC и радиуса на окръжността k.

Първа част

1	2	3	4	5
Г ($-\frac{2}{5}$) или (–0,4)	А	В	Г $x\in(-\infty;-5)\cup(-5;5)$	Б
6	**7**	**8**	**9**	**10**
В	В	В	Б	Б

Втора част

11. $4+2\sqrt{3}$

12. $2\sqrt{2}$

Трета част

13 зад.

Нека числата са a, $a+d$, $a+2d$ **1 точка**

Геометричната прогресия е $a+3$, $a+d$, $a+2d+2$ **1 точка**

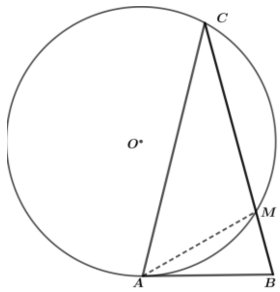
Съставяне системата $\left|\begin{array}{l} a+a+d+a+2d=30 \\ (a+d)^2=(a+3)(a+2d+2) \end{array}\right.$ **2 точки** (по 1 точка за уравнение)

Решаване на системата **2 точки**

Получаваме $\left|\begin{array}{l} a=2 \\ d=8 \end{array}\right.$ и $\left|\begin{array}{l} a=17 \\ d=-7 \end{array}\right.$ **2 точки** (по 1 точка за решение)

Началните числа са 2, 10, 18 или 17, 10, 3 **2 точки** (по 1 точка за случай)

14 зад.



Нека $MB = x$, $MC = 3x$

От свойството на допирателната $BA^2 = BM.BC = x.4x \Rightarrow AB = 2x$

$\angle BAM = \angle ACB = \dfrac{AM}{2}, \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta BAM$

$\Rightarrow \Delta BAM$ е равнобедрен и $AB = AM = 2x = 4$, $x = 2$

Бедрата са $4x = 8$

По херонова формула $S_{AMC} = 4\sqrt{15}$

$$S_{AMC} = \frac{AM.AC.CM}{4R}$$

$$R = \frac{16}{\sqrt{15}}$$

Радиусът може да се намери и по синусова теорема за AMC, като се намерят тригонометричните функции на ACM

<u>*Оценяване:*</u>

Изразяване на AB **2 точки**

Доказване $AM = AB$ = **1 точка**

Намиране на бедрата **2 точки**

Намиране на радиуса **5 точки**

Забележка:

Всеки друг вариант за решение може да се оценява по избран от проверяващите начин.