

СМБ – Секция “Изток”
КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 15.12.2019 г.
11 клас и 12 клас

Времето за решаване е 120 минути.
Организаторите Ви пожелават успех !

Име.....училище.....град.....

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен отговор. „Друг отговор” се приема за решение само, ако е отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки.

- 1.** Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2 - 4x - 7 = 0$, то стойността на израза $A = x_1(x_2 - 1) - x_2$ е равна на:
- а) -11 б) -3 в) 3 г) друг отговор

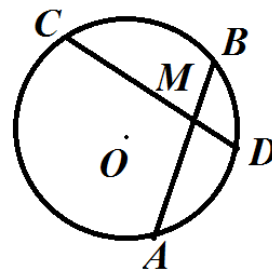
- 2.** Стойността на израза $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{5})^3}$ е:
- а) 0 б) $4 - 2\sqrt{5}$ в) $2\sqrt{5}$ г) друг отговор

- 3.** Дадена е петчленна геометрична прогресия 2; a ; b ; c ; $\frac{81}{8}$. Произведението abc е:
- а) $\frac{9}{2}$ б) $\frac{27}{4}$ в) $\frac{81}{4}$ г) друг отговор

- 4.** Кое от числата може да бъде вероятност на събитие?
- а) $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$ б) $\sqrt{2}$ в) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ г) $2 - \sqrt{5}$

- 5.** Решенията на неравенството $(x + 4)(x - 3) \leq 0$ са:
- а) интервал с дължина 7 б) обединение на два безкрайни интервала;
в) интервал с дължина 1 г) друг отговор.

- 6.** В окръжност с център O на чертежа, хордите AB и CD се пресичат в точка M . Ако $AM \cdot MB = 48$ и $CM:MD = 3:1$, то дължината на CD е равна на:
- а) 16 б) 4
в) 12 г) друг отговор



- 7.** Дадени са числата $a = 3^{\log_9 2}$, $b = 2\sin 135^\circ$, $c = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$. Кое от твърденията е вярно?
- а) $a \neq b = c$ б) $a = b \neq c$ в) $a = b = c$ г) a , b и c са различни

- 8.** В правоъгълен трапец е вписана окръжност с радиус $r = 4$ cm. Ако едно от бедрата на трапеца е равно на 10 cm, то голямата му основа е равна на:
- а) 6 cm б) 8 cm в) 10 cm г) друг отговор

- 9.** Равнобедрен триъгълник е вписан в окръжност с $R = 8$ cm. Разстоянието от центъра на окръжността до бедрото е равно на $4\sqrt{3}$ cm. Основата на триъгълника е равна на:
- а) $4\sqrt{3}$ cm б) 8 cm в) $8\sqrt{3}$ cm г) друг отговор

- 10.** Стойностите на реалното число k , за които решението на неравенството $(x - 1)(x^2 - 2x + k) \geq 0$ е обединение на един краен и един безкраен интервал са:
- а) $k \geq 1$ б) $k = 1$ в) $k < 1$ г) друг отговор

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се запише. Задачите се оценяват с по 5 точки.

- 11.** Страните на триъгълник имат дължини 10 cm, 14 cm, и 18 cm. Дължината на ъглополовящата на средния по големина ъгъл е равна на:

Отговор

- 12.** Числото $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Всичките му делители (включително 1 и 2020) са подредени в нарастващ ред. Кое число е на седмо място в редицата?

Отговор

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите две задачи трябва да се напише подробно решението. Задачите се оценяват с по 10 точки.

- 13.** Дадени са функциите $f(x) = x^2 - 2x + 5$ и $g(x) = \sqrt{9 - (x-1)^2}$.

- а) Намерете най-малката стойност на $f(x)$ и най-голямата стойност на $g(x)$.
б) Решете уравнението $f(x) = g(x) + 1$.

- 14.** $ABCD$ е правоъгълен трапец ($AB \parallel CD, AD \perp CD$) и $\angle ABC = 60^\circ$. Дължините на голямата основа AB , диагонала AC и бедрото BC образуват аритметична прогресия. Ако $CD = 4$ cm, намерете дължините на страните на трапеца и неговите диагонали.

Първа част

1	2	3	4	5
A	A	$\Gamma \frac{729}{8}$	B	A
6	7	8	9	10
A	B	$\Gamma - 12 \text{ cm}$	B	B

Втора част

11. $3\sqrt{15}$

12. 101

Трета част

13 зад.

Оценяване:

а) 4 точки

$$\text{За } f(x) \quad x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$$

1 точка

$$f_{\min} = f(1) = 4$$

1 точка

$$(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow 9 - (x-1)^2 \leq 9$$

1 точка

$$g(x) \leq \sqrt{9} \leq 3 \Rightarrow g_{\max} = 3$$

1 точки

б) 6 точки

I начин:

$$f(x) \geq 4, \text{ а } g(x) + 1 \leq 4$$

2 точки

$$\text{Равенство е възможно само при } f(x) = g(x) + 1 = 4$$

1 точка

$$\text{И двете стойности са достигат при } x = 1$$

1 точка

$$\text{Уравнението има единствен корен } x = 1$$

2 точки

II начин:

$$\text{Уравнението е равносилно на } x^2 - 2x + 4 = \sqrt{8 - x^2} + 2x \quad \underline{1 \text{ точка}}$$

$$\text{Полагаме } t = x^2 - 2x \Rightarrow t + 4 = \sqrt{8 - t} \quad \underline{2 \text{ точки}}$$

Получаваме след повдигане на втора степен

$$t^2 + 9t + 8 = 0 \quad \underline{1 \text{ точка}}$$

$$t = -1 \text{ е единствено решение} \quad \underline{1 \text{ точка}}$$

$$\text{Уравнението има единствен корен } x = 1 \quad \underline{1 \text{ точка}}$$

14 зад. Разглеждаме $\triangle ABC$ Срецу $\square ACB = 60^\circ$ лежи средната по големина страна Нека $AC = x$, тогава другите две страни са $x - d$ и $x + d$. От косинусова теорема

$$x^2 = (x+d)^2 + (x-d)^2 - 2(x-d)(x+d) \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = x^2 + 2xd + d^2 + x^2 - 2xd + d^2 - 2(x^2 - d^2) \frac{1}{2} \Rightarrow d^2 = 0.$$

$\triangle ABC$ е равностранен. От правоъгълния $\triangle ADC$ с ъгъл 30° получаваме $AB = BC = CA = 2 \cdot CD = 8 \text{ cm}$, $AD = AC \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$.

$$\text{От правоъгълния } \triangle ADB \Rightarrow BD^2 = AD^2 + AB^2 = 48 + 64 = 112 \Rightarrow BD = 4\sqrt{7}$$

Оценяване:

Доказване, че $\triangle ABC$ е равностранен

6 точки

Намиране на $AB = BC = CA$

2 точки

Намиране на BD

2 точки

